第 51 卷 第 2 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 51 No. 2
2012 年 3 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Mar. 2012

具有非线性扩散的捕食-食饵模型的整体分歧*

郭改慧[1]，李兵方[2]
（1. 陕西科技大学理学院，陕西 西安 710021；
2. 陕西铁路工程职业技术学院，陕西 渭南 714000）

摘　要：在 Dirichlet 边界条件下研究一类具有非线性扩散的捕食-食饵模型正解的存在性。首先利用极大值原理及上下解方法给出正解的先验估计。其次考察相关特征值问题，给出无界的分歧曲线，并以食饵生长率为分歧参数，证明了中性曲线附近存在发自半平凡解的局部分歧正解。最后将局部分歧延拓为整体分歧，从而得到正解存在的充分条件。

关键词：捕食-食饵；非线性扩散；分歧
中图分类号：O175.26　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2012）02－0049－05

The Global Bifurcation for a Predator-Prey Model with Nonlinear Diffusion

GUO Gaihui[1], *LI Bingfang*[2]
（1. College of Science, Shaanxi University of Science and Technology, Xi’an 710021, China;
2. Shaanxi Railway Institute, Weinan 714000, China）

Abstract: A nonlinear diffusive predator-prey model is studied under Dirichlet boundary conditions. Some a priori estimates are firstly derived. Then by investigating the corresponding eigenvalue problem and taking the growth rate of prey as a parameter, local bifurcation positive solutions emanating from the semi-trivial solutions are obtained. Finally, by use of global bifurcation theory, two sufficient conditions for the existence of positive solutions are established.

Key words: predator-prey; nonlinear diffusion; bifurcation

基于害虫的生物控制、化学控制和综合管理策略，考虑非线性扩散的捕食-食饵模型

$$\begin{cases} -\Delta[(1+\alpha v)u] = u(a-u) - v(1-e^{-\gamma u}), \\ \qquad x \in \Omega \\ -\Delta[(\mu + \dfrac{1}{1+\beta u})v] = v(c - v + d(1-e^{-\gamma u})), \\ \qquad x \in \Omega \\ u = v = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有光滑边界的有界开区域，u 和 v 分别表示食饵（害虫）和捕食者（天敌）的种群密度，γ 代表捕食者的捕食效率，d 代表食饵转化为捕食者的转化率。参数 a,γ,d 均为正常数，c 可正可负，$c>0$ 表示捕食者有其他的捕食来源。

在模型（1）中，$1-e^{-\gamma u}$ 即为 Ivlev 型功能反应函数，最早由 Ivlev[1] 提出。对无扩散情形，文［2］得到食饵灭绝和持续生存的充分条件。对一般扩散情形，即 $(\alpha,\beta)=(0,0)$，文［3］利用分歧理论得到分歧正解的存在性和稳定性。对带此类非线性扩散项的 Lotka-Volterra 捕食-食饵模型，文［4］给

* **收稿日期**：2011－06－19
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10971124，11001160）；陕西省自然科学基础研究计划资助项目（2011JQ1015）；陕西科技大学博士科研启动基金资助项目（BJ10－17）
作者简介：郭改慧（1980 年生），女，讲师；E-mail：guogaihui@sust.edu.cn

出局部分歧解的存在性，并讨论了非线性扩散对捕食过程的影响。

由于种群间的相互影响在种群扩散中起着非常重要的作用，带非线性扩散项的生物模型越来越受到国内外学者的广泛关注[5-6]。鉴于以上研究背景，本文在文［3］的基础上进一步讨论带有非线性扩散项的情况。实践证明，非线性扩散项的引入使问题变得更加复杂。

1 正解的先验估计

令 $\lambda_1(p,q) < \lambda_2(p,q) \leqslant \lambda_3(p,q) \leqslant \cdots$ 是特征值问题

$$-p\Delta\varphi + q(x)\varphi = \lambda\varphi, x \in \Omega, \varphi = 0, x \in \partial\Omega$$

的全部特征值，其中 p 为常数，$q(x) \in C(\overline{\Omega})$。由文［7］知，$\lambda_1(p,q)$ 是简单的，且关于 p 和 $q(x)$ 均严格单调递增。简记 $\lambda_i(1,q)$ 为 $\lambda_i(q)$，$\lambda_i(0)$ 为 λ_i。考虑边值问题

$$-\Delta u + q(x)u = au - u^2, x \in \Omega, u = 0, x \in \partial\Omega \tag{2}$$

由文［7］知，如果 $a \leqslant \lambda_1(q)$，那么 $u = 0$ 是（2）的唯一非负解，而当 $a > \lambda_1(q)$ 时，（2）存在唯一正解。当 $a > \lambda_1$ 时，记唯一正解为 θ_a。而且，θ_a 关于 a 单调递增，连续可微，并对任意 $x \in \Omega$，$0 < \theta_a < a$。因此，当 $a > \lambda_1$ 时，（1）存在半平凡解（θ_a，0）；当 $c > (\mu+1)\lambda_1$ 时，（1）存在半平凡解（0，$(\mu+1)\theta_{c/(\mu+1)}$）。引入新的函数

$$U = (1+\alpha v)u, \quad V = (\mu + \frac{1}{1+\beta u})v \tag{3}$$

则 $(U,V) \geqslant 0$ 和 $(u,v) \geqslant 0$ 之间存在一一对应关系。因此关注与（1）等价的椭圆方程

$$\begin{cases} -\Delta U = u(a-u) - v(1-\mathrm{e}^{-\gamma u}), & x \in \Omega \\ -\Delta V = v(c - v + d(1-\mathrm{e}^{-\gamma u})), & x \in \Omega \\ U = V = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

其中 $u = u(U,V)$，$v = v(U,V)$ 作为 (U,V) 的函数由（3）式唯一确定。

当 $a > \lambda_1, c > (\mu+1)\lambda_1$ 时，（4）除平凡解 $(0,0)$ 外，还存在两个半平凡解 $(U,V) = (\theta_a,0)$ 和 $(U,V) = (0,(\mu+1)^2\theta_{c/(\mu+1)})$。由 Poincare 不等式易得（4）正解存在的必要条件。证明略。

定理 1 若 $a \leqslant \lambda_1$ 或 $c < \mu\lambda_1 - d$，则（4）没有正解。

定理 2 设 $a > \lambda_1, c + d > \mu\lambda_1$。若 (U,V) 是（4）的任一正解，则对任意 $x \in \Omega$，有

$$0 < u(x) < U(x) < M(a) := (1 + \frac{a^2\alpha}{1-\mathrm{e}^{-\gamma a}})a,$$

$$0 < v(x) < V(x)/\mu <$$
$$(1+1/\mu)\min\{c+d, c+d\gamma M(a)\}$$

证明 设存在 $x_1 \in \Omega$，使得 $U(x_1) = \max_{x\in\overline{\Omega}} U(x)$。由于

$$-\Delta U(x_1) = u(x_1)(a - u(x_1)) - v(x_1)(1-\mathrm{e}^{-\gamma u(x_1)}) \geqslant 0$$

因此，$u(x_1) < a, v(x_1) < \dfrac{au(x_1)}{1-\mathrm{e}^{-\gamma u(x_1)}}$。设 $f(t) = \dfrac{t}{1-\mathrm{e}^{-t}}$。对任意 $t > 0$，$f'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{\mathrm{e}^t(1-\mathrm{e}^{-t})^2} > 0$，从而有 $f(t)$ 关于 $t > 0$ 单调递增，进而有 $v(x_1) < \dfrac{a^2}{1-\mathrm{e}^{-\gamma a}}$。注意到（3）式进一步得

$$0 < u(x) < U(x) \leqslant U(x_1) =$$
$$[1+\alpha v(x_1)]u(x_1) < (1 + \frac{a^2\alpha}{1-\mathrm{e}^{-\gamma a}})a := M(a)$$

设存在 $x_2 \in \Omega$，使得 $V(x_2) = \max_{x\in\overline{\Omega}} V(x)$。由于

$$-\Delta V(x_2) = v(x_2)(c - v(x_2) + d(1-\mathrm{e}^{-\gamma u(x_2)})) \geqslant 0$$

因此 $v(x_2) \leqslant c + d(1-\mathrm{e}^{-\gamma u(x_2)}) < \min\{c+d, c+d\gamma u(x_2)\}$。故结合（3）式得

$$0 < v(x) < V(x_2)/\mu = [\mu + \frac{1}{1+\beta u(x_2)}]v(x_2)/\mu <$$
$$(1+1/\mu)\min\{c+d, c+d\gamma M(a)\}$$

当 $c > (\mu+1)\lambda_1$ 时，类似文［5］可得 $V(x)$ 的正下界估计。证明略。

定理 3 设 $a > \lambda_1, c > (\mu+1)\lambda_1$，则 $V(x) \geqslant \mu(\mu+1)\theta_{c/(\mu+1)}$。

2 局部分歧正解的存在性

令 $X = C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega})$，其中 $C_0^1(\overline{\Omega}) = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$。下面以 a 为分歧参数，考察（4）发自半平凡解曲线 $(a;\theta_a,0)$ 和 $(a;0,(\mu+1)^2\theta_{c/(\mu+1)})$ 上的分歧正解。令

$$f(u,v) = u(a-u) - v(1-\mathrm{e}^{-\gamma u}),$$
$$g(u,v) = v(c - v + d(1-\mathrm{e}^{-\gamma u}))$$

其中 u 和 v 均为 (U,V) 的函数。将（4）在 $(U,V) = (\theta_a,0)$ 处 Taylor 展开得

$$\begin{pmatrix}\Delta U\\ \Delta V\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(\theta_a,0) \\ g(\theta_a,0)\end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_U & u_V \\ v_U & v_V\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U-\theta_a \\ V\end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix} F^1(a;U-\theta_a,V) \\ F^2(a;U-\theta_a,V)\end{pmatrix} = 0 \tag{5}$$

其中偏导数均为 $(\theta_a,0)$ 处的导数值，$F^i(U-\theta_a,V)$ 满足 $F^i(0,0)=F^i_{(U,V)}(0,0)=0,i=1,2$。

对（3）式两边关于 (U,V) 求导得

$$\begin{pmatrix} u_U & u_V \\ v_U & v_V \end{pmatrix}\Bigg|_{(\theta_a,0)} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha\theta_a(1+\beta\theta_a)}{\mu(1+\beta\theta_a)+1} \\ 0 & \dfrac{1+\beta\theta_a}{\mu(1+\beta\theta_a)+1} \end{pmatrix}$$

在（5）式中，令 $\overline{U}=U-\theta_a$，则有

$$\begin{cases} \Delta\overline{U}+(a-2\theta_a)\overline{U}+ \\ \dfrac{(2\alpha\theta_a^2-a\alpha\theta_a+\mathrm{e}^{-\gamma\theta_a}-1)(1+\beta\theta_a)}{\mu(1+\beta\theta_a)+1}V+ \\ F^1(a;\overline{U},V)=0, \\ \Delta V+\dfrac{(c+d(1-\mathrm{e}^{-\gamma\theta_a}))(1+\beta\theta_a)}{\mu(1+\beta\theta_a)+1}V+ \\ F^2(a;\overline{U},V)=0 \end{cases}$$

定义算子 $T:\mathbf{R}^+\times X\to X$ 为 $T(a;\overline{U},V)=$

$$\begin{pmatrix} K[(a-2\theta_a)\overline{U}+ \\ \dfrac{(2\alpha\theta_a^2-a\alpha\theta_a+\mathrm{e}^{-\gamma\theta_a}-1)(1+\beta\theta_a)}{\mu(1+\beta\theta_a)+1}V]+KF^1(a;\overline{U},V) \\ K[\dfrac{(c+d(1-\mathrm{e}^{-\gamma\theta_a}))(1+\beta\theta_a)}{\mu(1+\beta\theta_a)+1}V]+KF^2(a;\overline{U},V) \end{pmatrix}$$

其中 $K=(-\Delta)^{-1}$。令 $G(a;\overline{U},V)=(\overline{U},V)^{\mathrm{T}}-T(a;\overline{U},V)$，则 G 是 C^1 函数，$G(a;0,0)=0$。易知 $G(a;\overline{U},V)$ 满足 $U\geqslant 0,V\geqslant 0$ 的零点恰好是(4)的非负解。

构造集合 $S_1:=\{(a,c)\in\mathbf{R}^2:$

$$\lambda_1\left(-\frac{(c+d(1-\mathrm{e}^{-\gamma\theta_a}))(1+\beta\theta_a)}{\mu(1+\beta\theta_a)+1}\right)=0,a\geqslant\lambda_1\}$$

引理 1　设 $\mu\lambda_1-d<c<(\mu+1)\lambda_1$，则存在单调递减函数 $a=a_*(c)$ 使得

$$S_1=\{(a,c)\in\mathbf{R}^2:a=a_*(c),\ \mu\lambda_1-d<c<(\mu+1)\lambda_1\}$$

且满足 $a_*((\mu+1)\lambda_1)=\lambda_1$，$\lim_{c\to(\mu\lambda_1-d)^+}a_*(c)=+\infty$。

证明　令

$$S_1(a,c)=\lambda_1\left(-\frac{(c+d(1-\mathrm{e}^{-\gamma\theta_a}))(1+\beta\theta_a)}{\mu(1+\beta\theta_a)+1}\right)$$

那么 $S_1(\lambda_1,c)=\lambda_1-\dfrac{c}{\mu+1}>0$，且对任意 $(a,c)\in(\lambda_1,+\infty)\times\mathbf{R}$，$\partial S_1(a,c)/\partial a<0$。任取 $c_0\in(\mu\lambda_1-d,(\mu+1)\lambda_1)$，则 $S_1(\lambda_1,c_0)>0$，$\lim_{a\to+\infty}S_1(a,c_0)<0$，且 $S_1(a,c_0)$ 关于 a 严格单调递减，那么存在唯一的 $a=a_0>\lambda_1$ 使得 $S_1(a_0,c_0)=0$，且 $\partial S_1(a_0,c_0)/\partial a<0$。由隐函数定理知，存在定义在区间 $(c_0-\delta,c_0+\delta)\subset(\mu\lambda_1-d,(\mu+1)\lambda_1)$ 上的唯一光滑函数 $a=a_*(c)$，使得对任意 $c\in(c_0-\delta,c_0+\delta)$，$S_1(a_*(c),c)=0$，且满足 $a_*(c_0)=a_0$。由 c_0 的任意性知，对任意 $c\in(\mu\lambda_1-d,(\mu+1)\lambda_1)$，$S_1(a_*(c),c)=0$。等式 $S_1(a_*(c),c)=0$ 两边关于 c 求导得

$$(\partial S_1(a_*(c),c)/\partial a)\cdot a_*(c)+\partial S_1(a_*(c),c)/\partial c=0$$

由于 $S_1(a_*(c),c)$ 关于 c 单调递减，结合 $\partial S_1(a_*(c),c)/\partial a<0$ 知 $a_*(c)<0$，从而可得 $a=a_*(c)$ 关于 c 单调递减。由于 $S_1(\lambda_1,(\mu+1)\lambda_1)=0$，$\lim_{a\to+\infty}S_1(a,c)=\lambda_1-\dfrac{c+d}{\mu}$，进而可得 $a_*((\mu+1)\lambda_1)=\lambda_1$，$\lim_{c\to(\mu\lambda_1-d)^+}a_*(c)=+\infty$。

由引理 1 知，当 $\mu\lambda_1-d<c<(\mu+1)\lambda_1$ 时，存在唯一 $a_*>\lambda_1$ 使得 $S_1(a_*,c)=0$。此时不妨设 $\psi_*>0$ 满足

$$-\Delta\psi_*-\frac{(c+d(1-\mathrm{e}^{-\gamma\theta_{a_*}}))(1+\beta\theta_{a_*})}{\mu(1+\beta\theta_{a_*})+1}\psi_*=0,$$

$$x\in\Omega;\ \psi_*=0,x\in\partial\Omega;\ \int_\Omega\psi_*^2\,\mathrm{d}x=1$$

定理 4　设 $\mu\lambda_1-d<c<(\mu+1)\lambda_1$，则 $(a_*;\theta_{a_*},0)\in\mathbf{R}^+\times X$ 为（4）的分歧点，且在 $(a_*;\theta_{a_*},0)$ 的邻域内存在正解

$$\Gamma_*=\{(a(s);\theta_{a_*}+s(\varphi_*+\Phi_1(s)),\ s(\psi_*+\Psi_1(s))):0<s\leqslant\delta\}$$

其中 $\varphi_*\in C_0^1(\overline{\Omega})$，$\delta>0$ 充分小。这里 $(a(s);\Phi_1(s),\Psi_1(s))$ 是 C^1 连续函数，且满足 $a(0)=a_*$，$\Phi_1(0)=0$，$\Psi_1(0)=0$，$\int_\Omega\Psi_1\psi_*\,\mathrm{d}x=0$。

证明　令 $L(a_*;0,0)=D_{(\overline{U},V)}G(a_*;0,0)$，则 $L(a_*;0,0)\cdot(\varphi,\psi)=0$ 等价于

$$\begin{cases} -\Delta\varphi-(a_*-2\theta_{a_*})\varphi= \\ \dfrac{(1+\beta\theta_{a_*})(2\alpha\theta_{a_*}^2-a_*\alpha\theta_{a_*}+\mathrm{e}^{-\gamma\theta_{a_*}}-1)}{\mu(1+\beta\theta_{a_*})+1}\psi, \\ x\in\Omega, \\ -\Delta\psi-\dfrac{(c+d(1-\mathrm{e}^{-\gamma\theta_{a_*}}))(1+\beta\theta_{a_*})}{\mu(1+\beta\theta_{a_*})+1}\psi=0, \\ x\in\Omega,\ \varphi=\psi=0,x\in\partial\Omega \end{cases}$$

显然 $\psi\not\equiv 0$。注意到引理 1 可得 $\psi=\psi_*$，从而有

$$\varphi=\varphi_*:=(-\Delta-a_*+2\theta_{a_*})^{-1}\cdot\left(\frac{(1+\beta\theta_{a_*})(2\alpha\theta_{a_*}^2-a_*\alpha\theta_{a_*}+\mathrm{e}^{-\gamma\theta_{a_*}}-1)}{\mu(1+\beta\theta_{a_*})+1}\psi_*\right)$$

因此，算子 $L(a_*;0,0)$ 的核空间 $N(L(a_*;0,0))$

$=\mathrm{span}\{U_0\}, U_0=(\varphi_*,\psi_*)^{\mathrm{T}}$。令 $L^*(a_*;0,0)$ 为 $L(a_*;0,0)$ 的自伴算子，类似可得 $N(L^*(a_*;0,0))=\mathrm{span}\{U^*\}, U^*=(0,\psi_*)^{\mathrm{T}}$。由 Fredholm 选择公理知，$R(L(a_*;0,0))=\{(\varphi,\psi)\in X: \int_\Omega \psi\psi_*\mathrm{d}x=0\}$。故有

$$\dim N(L(a_*;0,0))=1, \mathrm{codim}R(L(a_*;0,0))=1$$

令 $L_1(a_*;0,0)=D^2_{a(\overline{U},V)}G(a_*;0,0)$。下面证明 $L_1(a_*;0,0)\cdot(\varphi_*,\psi_*)\notin R(L(a_*;0,0))$。经计算得

$$L_1(a_*;0,0)\cdot(\varphi_*,\psi_*)=$$

$$\begin{pmatrix} -K[(1-2\dfrac{\partial\theta_a}{\partial a})\varphi_*- \\ (\dfrac{(1+\beta\theta_a)(2\alpha\theta_a^2-a\alpha\theta_a+\mathrm{e}^{-\gamma\theta_a}-1)}{\mu(1+\beta\theta_a)+1})_{\theta_a}\dfrac{\partial\theta_a}{\partial a}\psi_*]|_{a=a_*} \\ -K[(\dfrac{(c+d(1-\mathrm{e}^{-\gamma\theta_a}))(1+\beta\theta_a)}{\mu(1+\beta\theta_a)+1})_{\theta_a}\dfrac{\partial\theta_a}{\partial a}\psi_*]|_{a=a_*}\end{pmatrix}$$

假设存在 $(h,k)\in X$ 使得 $L_1(a_*;0,0)\cdot(\varphi_*,\psi_*)=L(a_*;0,0)\cdot(h,k)$，则有

$$-\Delta k-\frac{(c+d(1-\mathrm{e}^{-\gamma\theta_{a_*}}))(1+\beta\theta_{a_*})}{\mu(1+\beta\theta_{a_*})+1}k=$$

$$-[(\frac{(c+d(1-\mathrm{e}^{-\gamma\theta_a}))(1+\beta\theta_a)}{\mu(1+\beta\theta_a)+1})_{\theta_a}\frac{\partial\theta_a}{\partial a}]|_{a=a_*}\psi_*$$

上式两边同乘以 ψ_*，分部积分得

$$\int_\Omega[(\frac{(c+d(1-\mathrm{e}^{-\gamma\theta_a}))(1+\beta\theta_a)}{\mu(1+\beta\theta_a)+1})_{\theta_a}\frac{\partial\theta_a}{\partial a}]|_{a=a_*}\cdot \psi_*^2\mathrm{d}x=0 \tag{6}$$

由于 θ_a 关于 a 严格单调递增，等式（6）左边大于 0，矛盾。

由 Crandall-Rabinowitz 局部分歧定理[8] 知结论成立。

下面以 a 为参数考察（4）发自半平凡解分支 $(a;0,(\mu+1)^2\theta_{c/(\mu+1)})$ 的局部分歧正解。构造集合

$$S_2:=\{(a,c)\in\mathbf{R}^2:\lambda_1(\frac{\gamma(\mu+1)\theta_{c/(\mu+1)}-a}{1+\alpha(\mu+1)\theta_{c/(\mu+1)}})=0, a>\lambda_1\}$$

类似引理 1 可得

引理 2 设 $c>(\mu+1)\lambda_1$，则存在单调递增函数 $a=a^*(c)$ 使得

$$S_2=\{(a,c)\in\mathbf{R}^2:a=a^*(c),c>(\mu+1)\lambda_1\}$$

且满足 $a^*((\mu+1)\lambda_1)=\lambda_1$，$\lim_{c\to+\infty}a^*(c)=+\infty$。

由引理 2 知，当 $c>(\mu+1)\lambda_1$ 时，存在唯一 $a^*>\lambda_1$ 使得 $S_2(a^*,c)=0$。此时不妨设 $\varphi^*>0$ 满足

$$-\Delta\varphi^*+\frac{\gamma(\mu+1)\theta_{c/(\mu+1)}-a}{1+\alpha(\mu+1)\theta_{c/(\mu+1)}}\varphi^*=0, x\in\Omega,$$

$$\varphi^*=0, x\in\partial\Omega, \int_\Omega\varphi^{*2}\mathrm{d}x=1$$

定理 5 设 $c>(\mu+1)\lambda_1$，则 $(a^*;0,(\mu+1)^2\theta_{c/(\mu+1)})\in\mathbf{R}^+\times X$ 为（4）的分歧点，且在 $(a^*;0,(\mu+1)^2\theta_{c/(\mu+1)})$ 的邻域内存在正解

$$\Gamma^*=\{(a(s);s(\varphi^*+\Phi_2(s)),(\mu+1)^2\theta_{c/(\mu+1)}+s(\psi^*+\Psi_2(s))):0<s\leqslant\delta\}$$

其中 $\psi^*\in C_0^1(\overline{\Omega})$，$\delta>0$ 充分小。这里 $(a(s);\Phi_2(s),\Psi_2(s))$ 是 C^1 连续函数，满足 $a(0)=a^*$，$\Phi_2(0)=0,\Psi_2(0)=0$，$\int_\Omega\Phi_2\varphi_*\mathrm{d}x=0$，且

$$\psi^*=(-\Delta-\frac{c}{\mu+1}+2\theta_{c/(\mu+1)})^{-1}\cdot (\frac{d\gamma(\mu+1)\theta_{c/(\mu+1)}+\beta\theta_{c/(\mu+1)}(c-2\theta_{c/(\mu+1)})}{1+\alpha(\mu+1)\theta_{c/(\mu+1)}}\varphi^*)$$

3 局部分歧解的延拓

这一节主要借助文［9］中的讨论将定理 4、定理 5 得到的局部分歧延拓为整体分歧。

令 $T'(a)=D_{(\overline{U},V)}T(a;0,0)$。易知 $\mu\geqslant1$ 是 $T'(a)$ 的一个特征值当且仅当存在某个 $i=1,2,\cdots$ 使得 $\lambda_i(\mu,q_a)=0$。若 $\lambda_1<a<a_*$，则 $\forall\mu\geqslant1,i\geqslant2,\lambda_i(\mu,q_a)>\lambda_1(1,q_{a_*})=0$。因此 $T'(a)$ 没有大于等于 1 的特征值，从而 $\mathrm{index}(T(a;\cdot),0)=1$。若 $a_*<a<a_*+\varepsilon$，其中 ε 充分小使得 $\lambda_2(\mu,q_{a_*+\varepsilon})\geqslant\lambda_1(\mu,q_{a_*})$ $(\mu\geqslant1)$，则 $\forall\mu\geqslant1,i\geqslant2$，$\lambda_i(\mu,q_a)\geqslant\lambda_2(\mu,q_a)>\lambda_2(\mu,q_{a_*+\varepsilon})\geqslant\lambda_1(\mu,q_{a_*})\geqslant\lambda_1(1,q_{a_*})=0$。由于 $\lambda_1(1,q_a)<\lambda_1(1,q_{a_*})=0$，$\lim_{\mu\to\infty}\lambda_1(\mu,q_a)=+\infty$，那么存在唯一 $\mu_1>1$ 使得 $\lambda_1(\mu_1,q_a)=0$。因此 $N(M_1I-T'(a))=\mathrm{span}\{(\overline{\omega},\overline{\chi})^{\mathrm{T}}\}$ 且 $\dim N(\mu_1I-T'(a))=1$，其中

$$\overline{\omega}=(-\mu_1\Delta-a+2\theta_a)^{-1}\cdot [\frac{(1+\beta\theta_a)(2\alpha\theta_a^2-a\alpha\theta_a+\mathrm{e}^{-\gamma\theta_a}-1)\theta_a}{\mu(1+\beta\theta_a)+1}\overline{\chi}]$$

$\overline{\chi}$ 满足 $-\mu_1\Delta\overline{\chi}+q_a(x)\overline{\chi}=0,x\in\Omega,\overline{\chi}=0,x\in\partial\Omega$

下面说明 μ_1 的代数重数为 1。只需证明 $R(\mu_1I-T'(a))\cap N(\mu_1I-T'(a))=0$。反证。假设存在 $(\omega,\chi)\in X$ 使得 $(\mu_1I-T'(a))(\omega,\chi)^{\mathrm{T}}=(\overline{\omega},\overline{\chi})^{\mathrm{T}}$，即

$$\mu_1\Delta\chi-q_a(x)\chi=\Delta\overline{\chi}, x\in\Omega, \overline{\chi}=0, x\in\partial\Omega$$

两边同乘以 $\overline{\chi}$，在 Ω 上积分，利用 Green 公式得

$$\int_\Omega\overline{\chi}\Delta\overline{\chi}\mathrm{d}x=\int_\Omega(\mu_1\Delta\chi-q_a(x)\chi)\overline{\chi}\mathrm{d}x=$$

$$\int_\Omega(\mu_1\Delta\overline{\chi}-q_a(x)\overline{\chi})\chi\mathrm{d}x=0$$

从而得 $\int_\Omega|\nabla\overline{\chi}|^2\mathrm{d}x=0$。矛盾说明假设命题不成立，

从而有 μ_1 的代数重数是 1。因此，当 $a_* < a < a_* + \varepsilon$ 时，$\mathrm{index}(T(a;\cdot),0) = -1$。

根据整体分歧定理[9]，定理 4 得到的局部分歧 Γ_* 可延拓为整体分歧。不妨设 M 为 Γ_* 沿 $a > \lambda_1$ 方向的极大连通分支，那么 M 是（4）发自半平凡解 $(a;\theta_a,0)$ 的分歧正解。令 $P = P_1 \times P_1$，其中 $P_1 = \{U \in C_0^1(\bar{\Omega}): U > 0, x \in \Omega; \frac{\partial U}{\partial n} < 0, x \in \partial\Omega\}$。在分歧点 $(a_*;\theta_{a_*},0)$ 的小邻域内，显然有 $M \subset P$。而且，分支 $M - \{(a_*;\theta_{a_*},0)\}$ 满足下列条件之一：

(i) M 在 $\mathbf{R}^+ \times X$ 内由 $(a_*;\theta_{a_*},0)$ 延伸到 ∞；

(ii) M 连接了分歧点 $(a_*;\theta_{a_*},0)$ 和 $(\hat{a};\theta_{\hat{a}},0)$，其中 $I - T'(\hat{a})$ 不可逆，且 $\hat{a} \neq a_*$；

(iii) M 包含形如 $(a;\theta_a + \bar{U}, V)$ 和 $(a;\theta_a - \bar{U}, -V)$ 的点，其中 $(\bar{U},V) \neq (0,0)$。

下面证明（i）成立。只要说明 $M - \{(a_*;\theta_{a_*},0)\} \subset P$，（ii）和（iii）即可排除。反证。假设 $M - \{(a_*;\theta_{a_*},0)\} \not\subseteq P$，则存在点 $(\hat{a};\hat{U},\hat{V}) \in (M - \{(a_*;\theta_{a_*},0)\}) \cap \partial P$ 和序列 $\{(a_n;U_n,V_n)\} \subset M \cap P$，使得当 $n \to \infty$ 时，$(a_n;U_n,V_n) \to (\hat{a};\hat{U},\hat{V})$。易知 $\hat{U} \in \partial P_1$ 或 $\hat{V} \in \partial P_1$。假设 $\hat{U} \in \partial P_1$，则要么存在 $x_0 \in \Omega$ 使得 $\hat{U}(x_0) = 0$，要么存在 $x_0 \in \partial\Omega$ 使得 $\frac{\partial \hat{U}}{\partial n}|_{x_0} = 0$。由于 $\hat{U}$ 满足方程

$$-\Delta \hat{U} = \hat{u}(\hat{a} - \hat{u}) - \hat{v}(1 - \mathrm{e}^{-\gamma\hat{u}}), x \in \Omega,$$
$$\hat{U} = 0, x \in \partial\Omega$$

由极大值原理得 $\hat{U} \equiv 0$。同理，若 $\hat{V} \in \partial P_1$，则 $\hat{V} \equiv 0$。故有 $(\hat{U},\hat{V}) \equiv (\theta_{\hat{a}},0)$ 或 $(0,0)$。注意到 $c < (\mu+1)\lambda_1$，方程（4）没有形如 $(0,V), V > 0$ 的半平凡解。

假设 $(\hat{U},\hat{V}) \equiv (\theta_{\hat{a}},0)$，即有 $(a_n;U_n,V_n) \to (\hat{a};\theta_{\hat{a}},0)$。此时 $(a_n;u_n,v_n) \to (\hat{a};\theta_{\hat{a}},0)$。令 $\hat{V}_n = \frac{V_n}{\|V_n\|_\infty}$，那么 $\hat{V}_n$ 满足

$$-\Delta \hat{V}_n = \frac{\hat{V}_n}{\mu + \frac{1}{1+\beta u_n}}[c - v_n + d(1 - \mathrm{e}^{-\gamma u_n})],$$
$$x \in \Omega, \hat{V}_n = 0, x \in \partial\Omega$$

由 L^P 估计和 Sobolev 嵌入定理知，存在 $\hat{V}_n$ 的收敛子列，仍记为 $\hat{V}_n$，使得当 $n \to \infty$ 时，$\hat{V}_n \to \hat{V}$ 在 $C_0^1(\bar{\Omega})$ 上成立，且 $\forall x \in \Omega, \hat{V} \geqslant 0, \not\equiv 0$，满足

$$-\Delta \hat{V} = \frac{\hat{V}}{\mu + \frac{1}{1+\beta\theta_{\hat{a}}}}[c + d(1 - \mathrm{e}^{-\gamma\theta_{\hat{a}}})],$$
$$x \in \Omega, \hat{V} = 0, x \in \partial\Omega$$

由极大值原理知 $\forall x \in \Omega$，$\hat{V} > 0$，从而可得

$$\lambda_1\left(-\frac{(c + d(1 - \mathrm{e}^{-\gamma\theta_{\hat{a}}}))(1 + \beta\theta_{\hat{a}})}{\mu(1 + \beta\theta_{\hat{a}}) + 1}\right) = 0$$

由引理 1 得 $\hat{a} = a_*$，矛盾。假设 $(\hat{U},\hat{V}) \equiv (0,0)$，类似可得矛盾。

因此 $M - \{(a_*;\theta_{a_*},0)\} \subset P$。由定理 2 知，$\|U\|_\infty$，$\|V\|_\infty$ 有界。由 L^P 估计和 Sobolev 嵌入定理知 $\|U\|_{C^1}$、$\|V\|_{C^1}$ 有界。因此正解分支 M 在正锥内只能沿参数 a 延伸到 ∞。

事实上，以上关于分歧解走向的讨论给出了正解存在的充分条件。

定理 6　如果 $\mu\lambda_1 - d < c < (\mu+1)\lambda_1$ 且 $a > a_*$，那么方程（4）至少存在一个正解。

类似可得

定理 7　如果 $c > (\mu+1)\lambda_1$ 且 $a > a^*$，那么方程（4）至少存在一个正解。

注 1　注意到 $(u,v) \geqslant (0,0)$ 和 $(U,V) \geqslant (0,0)$ 之间存在一一对应关系，定理 6 和定理 7 给出了方程（1）正解存在的两个充分条件。

参考文献：

[1] IVLEV V. Experimental ecology of the feeding fishes [M]. Yale University Press, New Haven, 1961.

[2] WU X J, HUANG W T. Dynamic analysis of a one-prey multi-predator impulsive system with Ivlev-type functional [J]. Ecological Modelling, 2009, 220: 774－783.

[3] 郭改慧,查淑玲. 带 Ivlev 反应项的捕食模型的全局分歧[J]. 系统科学与数学,2011,31(12):1633－1640.

[4] KADOTO T, KUTO K. Positive steady states for a prey-predator model with some nonlinear diffusion terms[J]. J Math Anal Appl, 2006, 323: 1387－1401.

[5] GUO G H, WU J H, MA C. Nonlinear diffusion effect on bifurcation structures for a predator -prey model[J]. Differential and Integral Equations, 2011, 24(1/2): 177－198.

[6] PAO C V. Strongly coupled elliptic systems and applications to Lotka-Volterra models with cross-diffusion[J]. Nonlinear Analysis, 2005, 60(7): 1197－1217.

[7] 叶其孝，李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京：科学出版社，1994.

[8] CRANDALL M G, RABINOWITZ P H. Bifurcation from simple eigenvalues[J]. J Functional Analysis, 1971, 8(2): 321－340.

[9] WU J H. Global bifurcation of coexistence state for the competition model in the chemostat [J]. Nonlinear Analysis, 2000, 39(7): 817－835.